

1 Probabilités et statistiques

1.1 Je connais mon cours

Définitions et probabilités associées	Univers des possibles :
Événement élémentaire :	Événement certain :
Événement impossible :	Événement :
Intersection d'événements :	
Réunion d'événements :	
Événements indépendants :	
Variable aléatoire	Définition :
Distribution :	
Espérance mathématique :	
Démonstration de $\mathbb{E}(X+Y)=\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)$:	
Démonstration de $\mathbb{E}(aX)=a\mathbb{E}(X)$:	
Variance :	
Démonstration de $\text{Var}(aX)=a^2\,\text{Var}(X)$:	
Écart-type :	

1.2 Exercices de base en statistiques

1.2.1 Ⓜ D'après Bac L, Pondichéry, avril 2001

Voici un tableau de données créé sous tableur donnant la mesure des masses à la naissance des filles et des garçons dans une maternité durant l'année 2000.

	A	B	C	D	E
1	masse M (en g)	garçons	filles	totaux	Pourcentages
2	$M < 1500$	3	4		0,3
3	$1500 \leq M < 2000$	9	9		
4	$2000 \leq M < 2500$	34	46		3,3
5	$2500 \leq M < 3000$	156	256		16,8
6	$3000 \leq M < 3500$	504	536		42,4
7	$3500 \leq M < 4000$	402	288		28,2
8	$M \geq 4000$	142	61		
9	Total	1250			100
10	Moyenne	3424,8			
11	Ecart Type	509,7		506,1	

On prendra 1200 g comme masse moyenne des enfants de masse inférieure à 1500 g et 4300 g comme masse moyenne des enfants de masse supérieure à 4000 g.

1. a. En utilisant la calculatrice, donner la valeur affichée par celle-ci de l'effectif total des filles ainsi que les arrondis à 0,1 près de la moyenne et de l'écart type des masses des filles à la naissance.

b. Reporter ces valeurs dans le tableau.

Pour les garçons l'effectif total est de 1250. D'autre part, la masse moyenne, à 0,1 près, des garçons à la naissance est de 3424,8 g et l'écart type vaut 509,7.

On note m la moyenne des masses à la naissance de tous les enfants (filles et garçons réunis).

a. En utilisant. les valeurs des cellules B9, C9, B10 et C10 quelle formule placeriez-vous dans la cellule D10 pour calculer cette moyenne m ?

b. Effectuer alors ce calcul.

3. La colonne E donne la répartition en pourcentage de chaque classe d'enfants (filles et garçons réunis). Ces pourcentages sont donnés à 0,1 près.

Quelle est la formule qui permet de donner le résultat de la cellule E2 ?

Calculer les résultats manquants de la colonne E.

1.2.2 Ⓜ ⚠ D'après bac L, Amérique du Sud, novembre 2002

L'entreprise « Bon Fondu » fabrique des boîtes de fromage fondu, sur un même site. Elle utilise trois machines différentes A, B, C. La fabrication du fromage fondu et le conditionnement sont automatisés. Le service qualité est chargé du suivi statistique de la production afin de garantir au mieux le respect des règles prévues par la législation en vigueur.

Partie A

La fabrication d'une journée est de 10 000 boîtes avec la répartition précisée dans le tableau suivant :

Tableau N° 1 : les masses sont exprimées en tonnes

Machine	A	B	C	Totaux
Boîtes sans défaut	1 800	4 500	2 500	
Boîtes avec défauts de fabrication	180	400	200	
Boîtes avec défauts de conditionnement	20	100	300	
Totaux				

1. Compléter le tableau précédent.

Dans les questions suivantes, les résultats demandés seront arrondis à 10^{-1} près.

2. a. Pour la machine A, quel est le pourcentage des boîtes présentant un défaut de fabrication ?

b. Pour la machine B, quel est le pourcentage des boîtes sans défaut ?

c. Parmi les boîtes sans défaut, quel est le pourcentage des boîtes fabriquées par la machine B ?

Partie B

La masse nette de fromage inscrite sur les boîtes est de 320 grammes. Afin de vérifier que la production est conforme à la déclaration figurant sur les boîtes, le service qualité prélève un échantillon de 20 boîtes produites par la machine B. Les valeurs en grammes, ordonnées, sont les suivantes :

315,5	315,5	316	321	322	323	323,5	323,5	324	324
324	325	325,5	326	326	327	328,5	329	329	329

1. Calculer la moyenne m de cette série statistique ainsi que son écart-type σ.

2. La production issue d'une machine est considérée comme conforme si au moins 95 % des boîtes de l'échantillon ont une masse appartenant à l'intervalle $[m-2\sigma\,;m+2\sigma]$. La production de la machine B est-elle conforme ?

2. a. Pour cet échantillon, préciser la médiane, le premier quartile et le troisième quartile.

b. Représenter le diagramme en boîte associé à cet échantillon, sur lequel figureront au moins la médiane et les premier et troisième quartiles. Unité graphique : 1 centimètre par gramme.

1.2.3 Ⓜ D'après Bac L, Nouvelle Calédonie, novembre 2002

On considère les quatre lettres A, T, C, G. Dans cet exercice, on s'intéresse aux mots de trois lettres (mots ayant un sens ou non) que l'on peut former avec ces lettres. Ainsi, les mots CAT, TTG et GAG conviennent.

1. a. Déterminer tous les mots de trois lettres distinctes que l'on peut constituer en commençant par la lettre T.

b. Combien de mots de trois lettres distinctes peut-on constituer ? Justifier.

2. Montrer que l'on peut former 64 mots de trois lettres.

3. On veut simuler des tirages de mots de trois lettres.

a. Expliquer comment on peut effectuer une telle simulation. L'illustrer par une suite d'exemples.

b. Effectuer cette simulation pour vingt tirages de mots. Donner les vingt mots obtenus ; combien d'entre eux sont formés de trois lettres différentes ?

Quelle est alors la fréquence d'apparition des mots de cette nature ?

1.2.4 Ⓜ D'après Bac L, Nouvelle Calédonie, novembre 2002

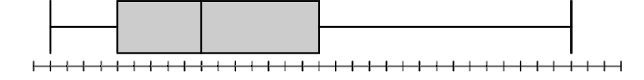
On étudie grâce à un tableur et à une calculatrice les communications téléphoniques d'une famille durant la période du 16 juin au 15 août 2000.

I. On s'intéresse d'abord à la durée des communications téléphoniques vers les téléphones mobiles pendant la période du 16 juin au 15 août.

Ci-dessous figure une copie de l'écran d'une calculatrice où est tracé un diagramme en boîte représentant la série relative à la durée de ces communications.

Sur ce diagramme sont entre autres indiqués :

- le minimun (10 secondes),
- le premier quartile (50 secondes),
- le troisième quartile (2 minutes 50 secondes),
- et le maximum (5 minutes 20 secondes).



Le pas de la graduation est de 10 secondes.

1. Quelle information a-t-on sur le pourcentage des communications téléphoniques qui ont duré moins de 50 secondes et sur celui des communications qui ont duré plus de 2min 50 s ?

2. a. Lire graphiquement la médiane et donner le résultat en minutes, secondes.

b. Peut-on dire qu'au moins la moitié des communications ont duré moins de 2 minutes ?

II. On s'intéresse ensuite à la durée des communications téléphoniques locales, toujours pendant la période du 16 juin au 15 août.

On étudie plus particulièrement les communications téléphoniques des quinze derniers jours du mois de juin. Les données figurent ci-dessous (cadre 1). On lit, par exemple, que le 16 juin il y a eu une communication téléphonique d'une durée de 8 minutes et 16 secondes ce qui est noté 0:08:16.

1. Pour cette période, quel est le jour où il y a eu le plus grand nombre de communications téléphoniques locales ?

2. Pour ce jour-là, calculer la durée moyenne d'une communication téléphonique locale.

III. On considère maintenant l'ensemble des communications téléphoniques locales durant la période du 16 juin au 15 août et on s'intéresse à la série constituée par la durée de ces appels.

Dans le cadre 2 figure un tableau regroupant les appels en fonction de leur durée.

1. À l'aide d'un tableur compléter les résultats du cadre 2.

En utilisant les données de ce cadre :

2. a. Déterminer le pourcentage des appels qui ont duré moins de 3 minutes.

b. Justifier que la médiane de la série est comprise entre 1 minute et 2 minutes.

3. À l'aide d'un tableur compléter les résultats du cadre 3.

En utilisant des données pertinentes de ce cadre, construire un diagramme en boîte correspondant à cette série (on prendra comme échelle 1 cm pour 1 minute).

Cadre 1

Dates	Durée des communications	Dates	Durée des communications
16 juin	0:08:08	28 juin	0:01:07
16 juin	0:11:07	29 juin	0:00:20
16 juin	0:01:00	24 juin	0:02:03
16 juin	0:12:22	24 juin	0:01:56
16 juin	0:12:48	24 juin	0:01:35
16 juin	0:07:29	24 juin	0:00:17
16 juin	0:11:36	24 juin	0:00:17
16 juin	0:09:28	24 juin	0:03:32
18 juin	0:02:30	24 juin	0:00:30
18 juin	0:02:54	24 juin	0:00:05
19 juin	0:00:10	24 juin	0:02:57
19 juin	0:05:29	24 juin	0:01:18
19 juin	0:01:05	25 juin	0:05:06
19 juin	0:01:21	25 juin	0:00:04
19 juin	0:00:18	25 juin	0:00:56
19 juin	0:13:58	25 juin	0:13:21
20 juin	0:01:08	26 juin	0:01:22
20 juin	0:07:59	26 juin	0:02:54
20 juin	0:04:31	26 juin	0:04:36
20 juin	0:04:53	26 juin	0:00:35
21 juin	0:00:01	26 juin	0:03:00
21 juin	0:01:53	26 juin	0:00:16
21 juin	0:01:28	26 juin	0:01:15
21 juin	0:01:18	26 juin	0:03:47
21 juin	0:01:10	26 juin	0:00:30
21 juin	0:00:34	27 juin	0:07:28
22 juin	0:00:08	27 juin	0:11:29
23 juin	0:01:05	27 juin	0:01:27
28 juin	0:03:39	27 juin	0:01:00
28 juin	0:03:43	27 juin	0:00:56

Cadre 2

Durée des communications	Nombre de communications
$0 \leq d < 30$ s	
30 s $\leq d < 1$ min	
1min $\leq d < 2$ min	
2 min $\leq d < 3$ min	
3min $\leq d < 5$ min	
5min $\leq d < 10$ min	
10 min $\leq d < 20$ min	
nombre total d'appels	

Cadre 3

moyenne =	
médiane =	
premier quartile =	
troisième quartile =	
minimum =	
maximum =	
premier décile =	
neuvième décile =	

1.2.5 D'après Bac L, France, juin 2003

Dans tout l'exercice les tailles sont exprimées en centimètres.

1. L'équipe de soins de la maternité « Beaux jours » a relevé la taille des nouveaux-nés. Pendant la troisième semaine du mois de janvier 2003, il y a eu 9 naissances. Les tailles sont données dans le tableau ci-dessous :

48	50,5	51,5	50	52,5	50	49	53	50

a. Calculer la moyenne des tailles de ces 9 nouveaux-nés.

b. Déterminer la médiane des tailles de ces 9 nouveaux-nés.

2. Sur la totalité du mois de janvier 2003, il y a eu 57 naissances à la maternité « Beaux jours ». Les 57 tailles sont données dans le tableau ci-dessous :

Taille en cm	46	47,5	48	48,5	49	49,5	50	50,5	51	51,5	52	52,5	53
Effectif	1	2	3	5	5	7	9	8	7	5	2	2	1

a. Calculer la moyenne des tailles de ces 57 nouveau-nés.

b. Déterminer la médiane des tailles de ces 57 nouveaux-nés en précisant la démarche.

c. Calculer le pourcentage de nouveaux-nés ayant une taille inférieure ou égale à 49 cm. Donner la réponse arrondie à 0,1 %.

d. Parmi toutes ces tailles, déterminer la plus petite taille t telle qu'au moins les trois quarts des nouveaux-nés aient une taille inférieure ou égale à t centimètres. Quel paramètre de la série des tailles a-t-on ainsi trouvé ? Tracer le diagramme en boîte de cette série statistique ci-dessous.

3. L'étude statistique de la taille, en centimètre, des 64 nouveaux-nés durant le même mois de janvier 2003 à la maternité « Bon accueil » a donné les résultats suivants :

Minimum	Maximum	Moyenne	Médiane	Premier quartile	Troisième quartile
46	53	49,3	49	48	50,5

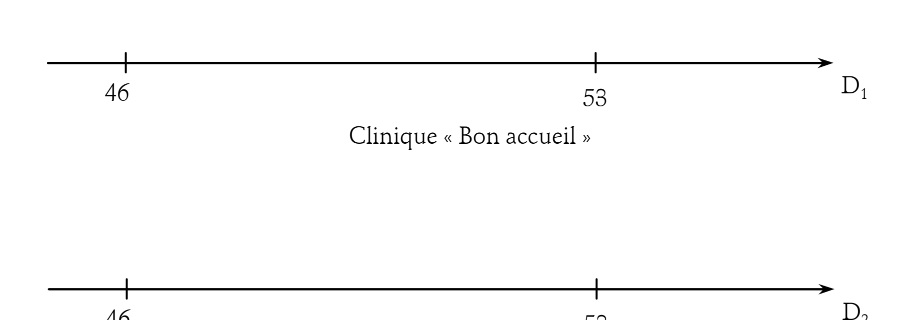
a. Tracer le diagramme en boîte correspondant à ces tailles sur l'axe D_2.

b. Parmi les deux maternités « Beaux jours » et « Bon accueil », une seule possède un service pour les naissances prématurées. Laquelle ? Justifier votre réponse.

c. Les deux maternités « Beaux jours » et « Bon accueil » sont les seules maternités de la même ville. Calculer la moyenne des tailles des nouveaux-nés en janvier 2003 dans les maternités de cette ville.

Les données de l'énoncé permettent-elles de déterminer la médiane des tailles de ces nouveaux-nés ? Si oui, la déterminer; sinon expliquer pourquoi.


Clinique « Beaux jours »



1.2.6 D'après Bac L, Liban, juin 2003

Le tableau ci-dessous donne :

- la répartition par classes d'âge d'un échantillon de 1000 personnes représentantif de la population française en 2000 ;
- la répartition par classes d'âges d'un échantillon de 1 000 personnes, telle qu'elle est prévue pour l'année 2025.

classe d'âge / année	]0 ; 20]	]20 ; 60]	]60 ; 66]	]66 ; 76]	]76 ; 86]	]86 ; 100]
2000	198	442	162	126	56	16
2025	136	379	212	166	821	25

(Sources : « *Tableaux de l'économie française* », d'après des données de l'INSEE)

Une telle prévision est utile pour planifier les investissements dans les domaines du logement, des maisons de retraite, des écoles, des hôpitaux, des transports… On suppose que la répartition dans chaque classe est uniforme et on remplacera chaque classe par son centre.

1. À l'aide de la calculatrice, donner les résultats arrondis à 10^{-1} près, de la moyenne, de l'écart-type, de la médiane, du premier quartile et du troisième quartile pour la série concernant l'année 2025.

2. On réalise le même type de prévision pour l'année 2050. On souhaite alors comparer les indicateurs des années 2000 et 2050. Pour cela, on dispose du tableau ci-dessous où les résultats sont arrondis à 10^{-1} près.

indicateur / année	moyenne	écart-type	médiane	1er quartile	3ème quartile
2000	44,8	22,4	40	40	63
2050	56,4	22,2	63	40	71

Pour les séries des années 2000 et 2050, réaliser les boîtes à moustaches non élaguées par rapport au même axe, en les construisant l'une en dessous de l'autre et en prenant 1 cm pour 10 ans.

3. Les phrases suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

a. En 2050, on prévoit que plus d'une personne sur deux aura au moins 60 ans.

b. En 2000, il y a au moins 75% des personnes âgées de 63 ans ou moins.

c. La dispersion par rapport à la moyenne des âges est supérieure en 2000 à celle prévue en 2050.

d. On prévoit qu'au moins trois personnes sur quatre auront 71 ans ou moins en 2050.

e. En 2050, on prévoit que la moitié de la population aura moins que l'âge moyen.

f. En 2050, on prévoit que la moitié de la population aura moins que l'âge médian.

g. On prévoit que le pourcentage de la population dont l'âge est compris entre 40 et 63 ans baissera environ de moitié entre 2000 et 2050.

1.2.7 D'après Bac L, Amérique du Sud, novembre 2003

On a demandé aux 28 élèves d'une classe de Première de prendre leur pouls au repos et de compter le nombre de battements cardiaques pendant une minute. On obtient ainsi une série statistique à partir des résultats obtenus, rassemblés dans un tableau :

Nombre de battements par minute	44	59	62	63	65	67	68	70	72	73
Effectifs	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2
Nombre de battements par minute	74	75	76	77	79	80	82	83	90	100
Effectifs	2	1	2	1	1	2	3	1	1	1

1. Représenter la série statistique par un diagramme en boîte sur lequel figureront les valeurs extrêmes, le premier et le troisième quartile ainsi que la médiane (unité graphique : 1 cm pour 5 battements par minute).

2. Calculer le nombre moyen de battements x (le résultat sera arrondi au dixième) ainsi que l'écart-type σ .

3. Calculer les pourcentages d'élèves qui se trouvent dans les intervalles $\left[x-n\sigma \,;\, x+n\sigma \right]$ avec n = 1, 2, 3.

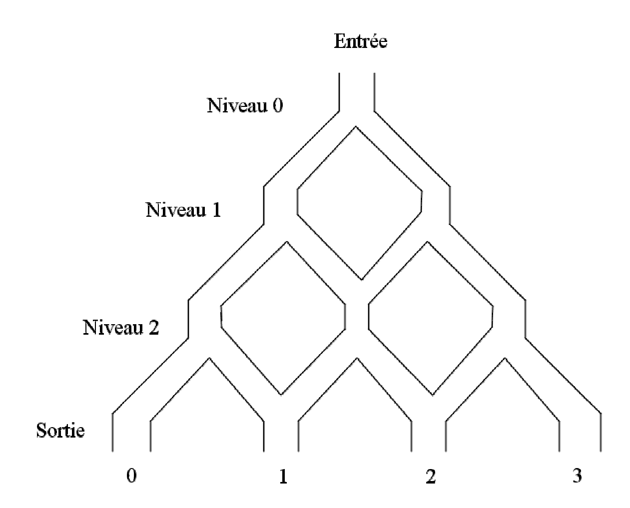
4. Pour tous les élèves du lycée, la même expérience est menée. On suppose que la distribution des battements suit une loi normale (*) de moyenne et d'écart-type inconnus.

(*) Voir Wikipedia : Loi Normale, Critères de normalité.

On trouve que 95 % des élèves ont des battements cardiaques compris entre 53 et 94.

a. Calculer alors le nombre moyen de battements par minute, puis l'écart type de cette série.

b. Il y a 2000 élèves dans le lycée. Quelle est la probabilité que dix élèves pris au hasard aient un rythme cardiaque supérieur à 110 ?



1.2.8 D'après Bac L, Liban, juin 2004

Une souris descend dans une canalisation (schématisée par la figure) aboutissant aux sorties 0, 1, 2, 3.

On suppose quelle progresse vers l'arrivée en se dirigeant au hasard à chaque niveau vers la droite ou vers la gauche pour accéder au niveau inférieur.

Un parcours possible peut se coder GGD, où G signifie « aller vers la gauche » et D « aller vers la droite », à chacun des trois niveaux.

On s'intéresse alors au numéro de la sortie de la souris.

Partie A : Étude théorique

Trouver tous les chemins possibles (éventuellement à l'aide d'un arbre) et compléter alors le tableau des fréquences théoriques.

Sortie numéro	0	1	2	3
Nombre de chemins possibles				
Fréquences théoriques en %				

Partie B : Simulation à l'aide d'un tableur

1. a. À l'aide d'un tableur effectuer une simulation de 100 progressions de la souris dans la canalisation : on obtient ainsi les fréquences correspondant à chacune des sorties possibles de la souris. On note alors la fréquence correspondant à la sortie n°1 obtenue.

b. En effectuant 50 simulations calculer les 50 fréquences correspondant à la sortie n°1.

c. Calculer la moyenne m de ces 50 fréquences ainsi que leur écart-type σ. Calculer le pourcentage de valeurs de la série des 50 fréquences situées dans les intervalles $[m-n\sigma\,;m+n\sigma]$, $n = 1, 2, 3$.

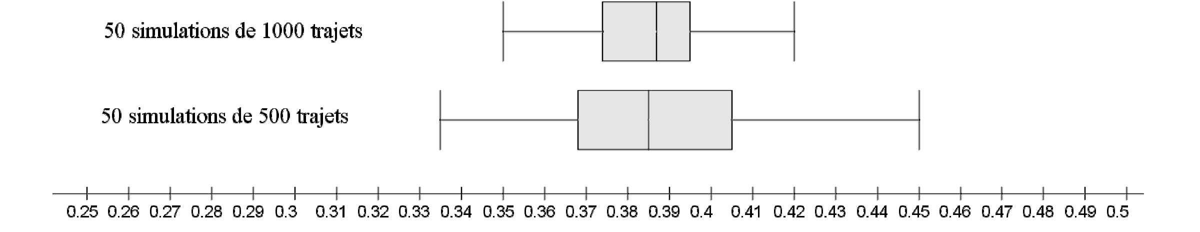
2. On effectue ensuite deux séries de 50 simulations, l'une correspondant à 500 progressions de la souris, l'autre à 1000 progressions et on obtient 50 fréquences de la sortie n°1 pour chaque série.

Le graphique ci-dessous représente les diagrammes en boîte (ou boîtes à moustaches) de ces deux séries.

Dessiner, sur le même graphique, le diagramme en boîte qui correspond à la série des 50 simulations effectuées dans la question 1 en calculant tous les éléments nécessaires pour construire ce type de boîte.

3. a. À l'aide des trois diagrammes, déterminer la série qui semble donner les fréquences les plus proches de la fréquence théorique.

b. Que faudrait-il faire pour s'en approcher encore davantage ?



1.3 Exercices de base en probabilités

1.3.1 Boules

Une urne contient une boule blanche numérotée 1, deux boules rouges numérotées 1 et 2 et trois boules vertes numérotées 1, 2 et 3. Les boules sont indiscernables.

On extrait successivement deux boules de l'urne sans remise dans l'urne de la première boule tirée.

Trouver la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « les deux boules sont rouges ».

B : « les deux boules sont de couleurs différentes ».

C : « le tirage comporte au moins une boule rouge ».

D : « le tirage comporte exactement une boule verte ».

E : « le tirage comporte une boule verte et une boule numérotée 1 ».

F : « le tirage comporte une boule rouge ou une boule numérotée 1 ».

1.3.2 Dans une urne

Mille boules numérotées de 0 à 999 sont placées dans une urne. On tire une boule au hasard et on note X le numéro sorti.

1. Calculer la probabilité des événements :

A : « X est divisible par 5 » ;

B : « X se termine par 0 » ;

C : « X est multiple de 2 » ;

D : « X est divisible par 3 ».

2. Déterminer la probabilité des événements $A \cap C, A \cup C, B \cap D, B \cup D, A \cap D, A \cup D, A \cap B, C \cup D$.

1.3.3 Dés - 1

On lance deux dés cubiques équilibrés, dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

1. Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « Obtenir exactement un 1 ».

B : « Obtenir aucun 1 ».

C : « Obtenir au moins un 1 ».

D : « Obtenir au plus un 1 ».

E : « Obtenir deux nombres pairs ».

F : « Obtenir une somme supérieure ou égale à 8 ».

2. Expliciter l'événement $E \times F$ et calculer sa probabilité.

1.3.4 La loterie

Dans une loterie, on vend 100 billets dont 3 sont gagnants.

1. On achète un billet. Quelle est la probabilité qu'il soit gagnant ?
2. On achète un deuxième billet. Quelle est la probabilité de gagner au moins un lot ?

1.3.5 Dés - 2

Un dé cubique parfaitement équilibré a trois faces marquées 1, une face marquée 10 et deux faces marquées 100. On lance le dé une fois.

Déterminer la loi de probabilité correspondant à cette expérience., son espérance mathématique et sa variance.

1.3.6 Dés - 3

On joue avec un dé pipé (les six faces n'ont pas les mêmes chances d'apparaître) à six faces numérotées de 1 à 6.

Soit A : « Il sort un nombre pair » et B : « Il sort un nombre impair », nous avons $p(A) = \frac{3}{4}p(B)$ (avec équiprobabilité entre les numéros pairs et également équiprobabilité entre les numéros impairs).

1. Calculer la probabilité d'obtenir 1, 2 ... 6.
2. Soit X la variable aléatoire « Numéro sorti ». Calculer l'espérance mathématique de X.

1.3.7 Dés - 4

On lance au hasard quatre fois de suite un dé équilibré et on considère le nombre formé par les quatre numéros pris dans l'ordre de sortie.

Ω désigne l'ensemble des issues possibles.

Calculer les probabilités des évènements suivants :

A : « Le nombre est 4211 ».

B : « Le nombre est formé de quatre chiffres distincts ».

C : « Le nombre est formé d'au moins deux chiffres identiques ».

P : « Le nombre est pair ».

I : « Le nombre est impair ».

E : « Le nombre est impair et est formé de quatre chiffres distincts ».

F : « Le nombre est pair ou est formé d'au moins deux chiffres identiques ».

1.3.8 Dés - 5

On lance deux dés non truqués. X est la variable aléatoire égale au plus grand des deux numéros obtenus.

1. A l'aide d'un tableau à double entrée déterminer toutes les possibilités et en déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

2. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\sigma(X)$.

1.3.9 Chemises

On place au hasard trois chemises de couleurs bleue, blanche et rouge dans quatre tiroirs a, b, c et d .

1. Combien y-a-il de répartitions possibles ?

2. Calculer les probabilités des évènements suivants :

A : « Toutes les chemises sont dans le tiroir a ».

M : « Toutes les chemises sont dans le même tiroir ».

V : « Les tiroirs b et c sont vides ».

V' : « Seuls les tiroirs b et c sont vides ».

3. V désigne la variable aléatoire qui à une répartition associe le nombre de tiroirs vides. Quelle est la loi de probabilité de V ?

4. En moyenne, combien de tiroirs restent vides lors d'un grand nombre de rangements ?

1.3.10 Mots

On dispose de douze jetons indiscernables au toucher et portant les lettres de A à L. On place au hasard ces douze jetons sur une grille de 3 lignes de 4 cases.

1. a. Quelle est la probabilité de lire le mot « AIDE » sur la deuxième ligne ?

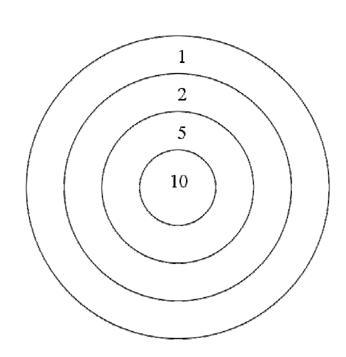
b. Quelle est la probabilité de lire à la fois le mot « BAC » dans la première colonne et le mot « AIDE » dans la deuxième ligne ?

2. Maintenant, pour remplir les cases de la première ligne, on tire un jeton parmi les douze, on écrit la lettre dans la première case, on remet le jeton et on recommence l'expérience pour chacune des 3 autres cases.

Soit X le nombre de A obtenus sur cette première ligne.

Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.

1.3.11 Fléchettes



Un joueur lance des fléchettes sur une cible circulaire formée de 4 régions marquées 1, 2, 5 et 10.

La probabilité que le joueur atteigne la cible est de 0,6 et la probabilité d'atteindre la région i est **inversement proportionnelle** à i.

1. Calculer la probabilité d'atteindre la région i pour $i=1, 2, 5, 10$.

2. Si le joueur atteint la région i, il marque i points et 0 point s'il n'atteint pas la cible.

Soit la variable aléatoire X égale au nombre de points marqués lors d'un lancer. Calculer l'espérance mathématique de X.

3. Le joueur lance deux flèches de suite, les lancers étant indépendants. Soit Y la variable aléatoire égale à la somme des points marqués lors des deux lancers. Calculer l'espérance mathématique de Y.

4. Le joueur lance trois flèches de suite. Quelle est la probabilité qu'il marque au moins 25 points ?

5. Reprendre les questions 1 à 4 en considérant que la probabilité que le joueur atteigne la cible est 0,6 et la probabilité d'atteindre la région i est **proportionnelle à l'aire** de la région i.

1.3.12 Billes

Un jeu consiste à lancer une bille dans un circuit comportant 5 portes: A, B, C, D et E rapportant respectivement 1, 2, 3, 4 et 5 points.

Au départ la bille passe au hasard par A, B ou C.

De A, elle va au hasard vers B, D ou E. De B, elle va vers D ou E.

De C, elle va vers E ; de D ou E, elle sort du circuit.

1. Faire un schéma du circuit, indiquant tous les trajets possibles.

2. Les choix de chacune des portes étant équiprobables, calculer la probabilité du trajet (A, B, D).

3. Calculer la probabilité de chacun des trajets.

4. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de points marqués lors du trajet. Donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

1.3.13 Urnes et dés

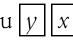
On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient trois boules blanches et une boule noire, l'urne U_2 contient une boule blanche et deux boules noires.

On lance un dé non truqué. Si le dé donne un numéro inférieur ou égal à 2, on tire une boule dans l'urne U_1 ; sinon on tire dans l'urne U_2 (les boules sont indiscernables au toucher).

Calculer la probabilité de tirer une boule blanche.

1.3.14 Dominos

On considère l'ensemble E = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}.

Avec deux chiffres disfincts x et y de E on crée un unique domino noté indifféremment  $\boxed{x}\boxed{y}$ ou $\boxed{y}\boxed{x}$

Avec un chiffre z de E, on forme un unique domino double noté  $\boxed{z}\boxed{z}$.

1. Montrer que l'on peut ainsi créer 36 dominos.

2. On tire au hasard un domino.

a. Quelle est la probabilité d'obtenir un domino constitué de chiffres pairs ?

b. Quelle est la probabilité d'obtenir un domino dont la somme des chiffres est paire ?

3. On tire au hasard et simultanément deux dominos. Un élève affirme : « la probabilité d'obtenir un domino double et un domino simple dont l'un des chiffres est celui du domino double est égale à $\frac{4}{45}$ ».

Son affirmation est-elle vraie ou fausse ?

1.3.15 Bandit manchot

Dans une salle de jeux un appareil comporte 4 roues, chacune portant à sa périphérie 8 images de fruits différents : Ananas, Bananes, Cerises, Citrons, Fraises, Groseilles, Oranges, Raisins

Une mise de 1 € déclenche le fonctionnement de l'appareil pour une partie. Chacune des 4 roues affiche au hasard dans une fenêtre un de ces fruits.

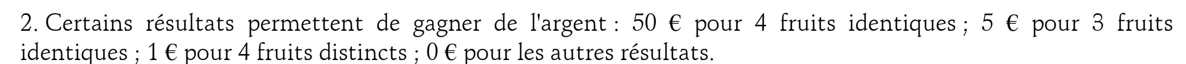
On admettra que tous les événements élémentaires sont équiprobables.

1. Calculer la probabilité des événements suivants:

E : « On obtient 4 fruits identiques ».

F : « On obtient 3 fruits identiques et trois seulement ».

G : « On obtient 4 fruits distincts ».

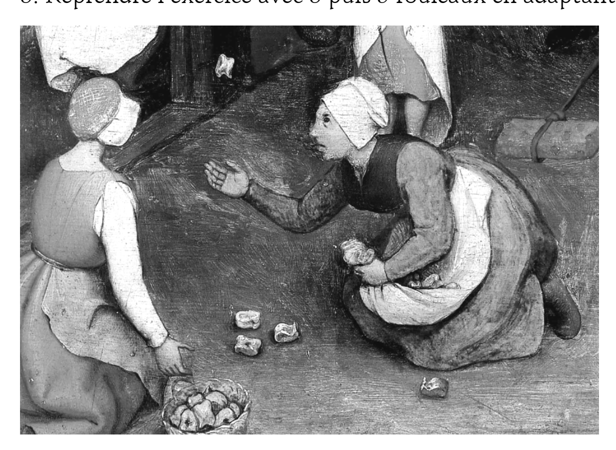


2. Certains résultats permettent de gagner de l'argent : 50 € pour 4 fruits identiques ; 5 € pour 3 fruits identiques ; 1 € pour 4 fruits distincts ; 0 € pour les autres résultats.

Soit X la variable aléatoire qui à chaque résultat associe le gain indiqué diminué de la mise.

Calculer l'espérance mathématique de X. Le jeu mérite-t-il son surnom dans ce cas ?

3. Reprendre l'exercice avec 3 puis 5 rouleaux en adaptant les événements E, F et G.



1.3.16 L'astragale

Les Grecs et les Romains utilisaient à la place des dés des osselets d'agneaux, appelés *astragales*.

Ces osselets sont à l'origine du jeu d'osselets beaucoup joué dans les cours de récréation.

Les astragales pouvaient retomber sur une de leurs 4 faces numérotées 1, 2, 3, 4.

Des expériences statistiques ont permis d'établir que

$$p(1) = p(2) \; ; p(3) = p(4) \text{ et } p(1) = 4p(3).$$

1. Calculer ces 4 probabilités élémentaires.

2. On jette un astragale 5 fois de suite. Calculer les probabilités d'obtenir:

– 3 fois exactement la face n°1 ;

– 3 fois exactement la face n°3 ;

– 3 fois exactement une même face ;

– au moins une fois la face n°4 ;

– uniquement les faces n°1 ou n°2.

(Breughel l'ancien, anciens jeux d'enfants, 1560)

1.3.17 La chauve-souris (merci à J.M. Bigard…)

Une porte est munie d'un clavier portant les touches 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D.

La porte s'ouvre lorsqu'on frappe dans l'ordre 3 chiffres et 2 lettres qui forment un code. Les chiffres sont distincts, les lettres peuvent être identiques. Une chauve-souris souhaite se rendre chez J. M. Bigard au 5ème étage, porte D42 ; elle a lu le mode d'emploi de l'ouvre-porte et sait parfaitement bien s'en servir.

1. Quelle est la probabilité pour que la chauve-souris ouvre la porte au 1er essai si :

a. Elle ignore le code.

b. Elle se souvient seulement que les 3 chiffres du code sont pairs.

c. De plus, elle se souvient que les deux lettres sont identiques.

2. La porte est équipée d'un système d'alarme se déclenchant lorsqu'aucun des 3 chiffres tapés ne fait partie du code. Une chauve-souris arrive devant l'ouvre-porte en ignorant le code.

a. Quelle est la probabilité pour qu'elle provoque l'alarme au premier essai.

b. Elle effectue 4 essais successifs et indépendants. Quelle est la probabilité pour qu'elle déclenche l'alarme au moins une fois au cours des 4 essais ?

Arrive une chauve-souris. Enragée.
Elle est là, tu vois, elle bave, elle est enragée.
Elle est là : "Argglbrrll…" Bon… Hop !!!
Elle s'fout à trifouiller mon code.
Elle est là, elle trifouille.
Elle cherche, elle cherche.
Si, si, Monsieur, quand elles sont enragées,
elles cherchent quand même !
Elle est là, elle cherche, elle cherche… Pan !!!
Elle tombe sur mon code !
Faut encore qu'elle imite la voix d'un gars que
j'connais !!! Sinon, j'ouvre pas, moi !

texte : J.M. Bigard, P. Palmade

1.4 Exercices intermédiaires

1.4.1 My student is rich

Dans une classe où tous les élèves étudient l'anglais, on a testé le caractère visuel ou auditif de chacun d'eux : 70 % sont des visuels et 30 % des auditifs.

On a noté que 50 % des visuels de cette classe ont de bonnes notes en anglais, et que 80 % des auditifs de cette même classe ont de bonnes notes en anglais.

On prend au hasard un nom sur la liste des élèves de cette classe. Déterminer la probabilité des événements suivants :

E : « l'élève tiré est un visuel qui a de bonnes notes en anglais » ;

F : « l'élève tiré est un auditif qui a de bonnes notes en anglais » ;

G : « l'élève tiré a de bonnes notes en anglais ».

1.4.2 Anniversaires

Le professeur Laplace arrive dans une pièce où se trouvent déjà sept personnes ; il annonce alors : « je vous parie 100 € contre 1 € qu'au moins deux personnes présentes (moi non compris) sont nées un même jour de la semaine. »

Prenez-vous son pari ? (s'il a raison vous lui donnez 1 €, s'il a tort il vous donne 100 €)

1.4.3 Le temps en Océasifrique

Le temps en Océasifrique se comporte de manière assez prévisible : dans une journée, soit il fait sec (événement S), soit il fait humide (événement H).

S'il fait sec aujourd'hui, alors il fera sec demain avec la probabilité 0,8.

S'il fait humide aujourd'hui, alors il fera humide demain avec la probabilité 0,6.

1. Aujourd'hui nous sommes dimanche et il fait sec. Quelle est la probabilité d'avoir :

   a. mardi sec ?

   b. mercredi humide ?

   c. jeudi sec ?

   d. toute la semaine prochaine sèche ?

2. Écrire un algorithme permettant de dire la probabilité qu'il fasse sec ou humide dans n jours suivant le temps aujourd'hui.

3. Que pouvez-vous dire sur vos prévisions lorsque n devient grand ?

1.4.4 Au soleil

Parmi quinze appareils, quatre sont destinés à des pays chauds et ont été « tropicalisés ». L'opérateur chargé de l'empaquetage a oublié d'étiqueter de manière distincte les appareils tropicalisés.

Il a devant lui quinze paquets identiques et doit retrouver les quatre appareils tropicalisés. Ils les ouvre jusqu'à ce qu'il ait obtenu les quatre.

1. Il ouvre quatre paquets. Quelle est la probabilité pour qu'il retrouve les quatre appareils tropicalisés ?

2. Quelle est la probabilité pour qu'il soit obligé d'ouvrir au moins cinq paquets ?

3. Quelle est la probabilité que les appareils soient les derniers paquets à ouvrir ? (loi dite « de Murphy » ou « de la Tartine »).

4. Quelle est la probabilité qu'il soit obligé d'ouvrir tous les paquets sauf le dernier ?

1.4.5 Keno

On s'intéresse au jeu « Keno » de la Française Des Jeux.

L'une des façons de jouer est la suivante : dans une grille contenant une fois chacun les nombres de 1 à 70, on choisit 10 numéros.

Un tirage au sort de 20 numéros a lieu : une grille est gagnante dans l'un des deux cas suivants :

* soit aucun des numéros sortis n'a été trouvé ;

* soit au moins cinq numéros sortis ont été trouvés.

Ci-dessous se trouve un extrait tiré des règles figurant au dos des bulletins.

Sur 10 000 bulletins, on a obtenu les résultats suivants :

nombre de numéros trouvés	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
effectif	254	1253	2521	2922	1962	822	220	41	5	0	0

Par exemple, le nombre de bulletins où on a trouvé exactement deux bons numéros est de 2521.

1. a. Combien y a-t-il de bulletins gagnants (en %) ?

Ce pourcentage est-il proche du « 1 sur 7,4 » annoncé dans le prospectus de la FDJ ?

2. Sur l'échantillon observé, combien un bulletin contient-il de bons numéros en moyenne ?

3. a. Déterminer, la médiane ainsi que le premier et le troisième quartile de la série résumée par le tableau.

b. Construire le diagramme en boîte correspondant.

4. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a. Au moins la moitié des bulletins comporte au plus 2 bons numéros.

b. 25 % au plus des bulletins comportent 4 bons numéros ou davantage.

c. Au moins 50 % des bulletins comportent de 2 à 4 bons numéros.

6. Les 10 000 joueurs ont misé 3 € chacun : calculer le total des gains redistribués.

Prospectus

	Numéros joués par grille	Vos chances totales de gagner	Numéros trouvés par grille	Vos chances totales de gagner	Gain x fois la mise	Gain pour une mise de 1,5 €	Gain pour une mise de 3 €
	10 numéros	1 sur 7,4	10 9 8 7 6 5 0	1 sur 2147181 1 sur 47238 1 sur 2571 1 sur 261 1 sur 44 1 sur 12 1 sur 39	x 200 000 x 2 500 x 100 x 10 x 5 x 2 x 2	300 000 € 3750 € 150 € 15 € 7,5 € 3 € 3 €	600 000 € 7 500 € 300 € 30 € 15 € 6 € 6 €

1.4.6 Boîtes et boules

Une boîte contient 6 boules vertes et n boules blanches. Un jeu consiste à tirer simultanément deux boules de la boîte. Si les deux boules sont de même couleur, le joueur gagne 1 €, si elles sont de couleurs différentes, le joueur perd 1 €.

1. Nous supposons que $n = 3$. Calculer les probabilités d'obtenir :

a. Deux boules de même couleur.

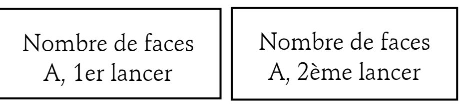
b. Deux boules de couleurs différentes.

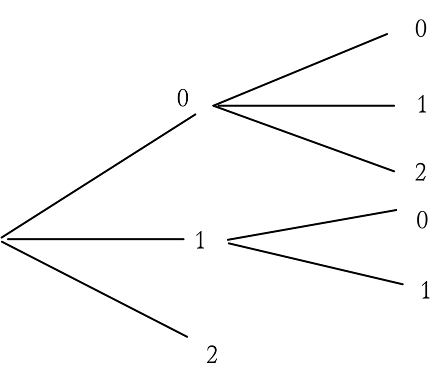
2. Nous supposons n quelconque et supérieur ou égal à 2. On note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules, associe le gain algébrique du joueur.

a. Exprimer en fonction de n les probabilités de A : « $X = 1$ » et B : « $X = -1$ ».

b. Calculer l'espérance mathématique de X, notée $\mathbb{E}(X)$.

c. Pour quelles valeurs de n a-t-on $\mathbb{E}(X) = 0$? $\mathbb{E}(X) < 0$?





Dans cet exercice, les résultats seront donnés sous forme de fractions.

On dispose de deux dés tétraédriques identiques : les quatre faces sont marquées A, B, C et D.

1. On lance les deux dés simultanément et on note la lettre de la face sur laquelle repose chacun des dés.

Déterminer la probabilité des événements suivants :

- E_0 : « ne pas obtenir la lettre A »,
- E_1 : « obtenir une fois la lettre A »,
- E_2 : « obtenir deux fois la lettre A ».

2. On organise un jeu de la façon suivante : le joueur lance les deux dés simultanément.

- Si les deux dés reposent sur les faces « A », le jeu s'arrête.
- Si un seul dé repose sur la face « A », le joueur relance l'autre dé et le jeu s'arrête.
- Si aucun dé ne repose sur la face « A », le joueur relance les deux dés et le jeu s'arrête.

a. Recopier et compléter l'arbre suivant en indiquant sur chaque branche la probabilité correspondante.

b. Le joueur gagne si, lorsque le jeu s'arrête, les deux dés reposent sur les faces « A ».

Montrer que, pour le joueur, la probabilité de gagner est de $\frac{49}{256}$.

c. Pour participer, le joueur doit payer 5 euros. S'il gagne, on lui donne 10 euros. Si, lorsque le jeu s'arrête, un seul dé repose sur la face « A », il est remboursé. Sinon, il perd sa mise.

Le jeu est-il favorable au joueur ?

1.5 Pour chercher

1.5.1 Les fraudeurs

Dans un wagon de tramway se trouvent neuf personnes : 3 ont fraudé, les autres sont en règle. Le contrôleur arrive et choisit 3 personnes au hasard.

1. a. Quelle est la probabilité qu'il tombe précisément sur les trois fraudeurs ?

b. Quelle est la probabilité qu'il ne trouve aucun des trois fraudeurs ?

c. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fraudeurs trouvé par le contrôleur ; déterminer la distribution de X, son espérance et son écart-type.

2. Même questions mais il y a 3*n* personnes dans le wagon dont 1/3 a fraudé ($n > 3$).

1.5.2 Etude de minima

1. On considère la série statistique S formée des nombres –1, 0, 2, 3 et 5.

a. Déterminer sa moyenne, sa variance et son écart-type.

b. On considère la fonctions f qui à tout x réel associe

$$f(x)=\frac{1}{25}\left[(x+1)^2+x^2+(x-2)^2+(x-3)^2+(x-5)^2\right].$$

Déterminer l'abscisse m de son minimum ; que vaut $f(m)$?

Donner une interprétation « géométrique » de l'écart-type de S.

c. Généraliser les résultats précédents à une série statistique $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ puis à une variable aléatoire X : $(x_i, p_i)_{i=1,\dots,n}$.

Vous comprenez maintenant pourquoi on appelle également l'écart-type : écart quadratique moyen…

2. On considère toujours la série statistique S formée des nombres –1, 0, 2, 3 et 5.

a. Calculer la médiane de la série S.

b. On considère maintenant la fonction g qui à tout x réel associe le nombre

$$g(x)=\frac{1}{5}\left(|x+1|+|x|+|x-2|+|x-3|+|x-5|\right)$$

c. Simplifiez l'écriture de g sur chacun des intervalles $]-\infty;-1]$, $[-1;0]$, $[0;2]$, $[2;3]$ et $[5;+\infty[$.

d. En déduire le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$. Quelle est l'abscisse du minimum m' de g ? Que vaut ce minimum ?

e. Généraliser les résultats précédents à une série statistique $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ puis à une variable aléatoire X : $(x_i, p_i)_{i=1,\dots,n}$.

1.5.3 Jetons sans remise

Une urne contient n jetons : 5 jetons rouges et $(n-5)$ jetons noirs, numérotés de 1 à n, $n \geq 5$.

Un joueur tire au hasard, successivement et **sans remise**, deux jetons de l'urne.

1. a. Soit Ω l'ensemble de tous les tirages. Déterminer le nombre de tirages possibles.

b. On note p_n la probabilité de l'événement A : " les deux jetons sont de couleurs différentes ".

Montrer que $p_n = \dfrac{10n - 50}{n^2 - n}$.

2. Le joueur gagne 2 euros s'il réalise A et perd 1 euro dans le cas contraire. On note X le gain algébrique du joueur.

2. a. Donner la loi de probabilité de X et vérifier que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{-n^2 + 31n - 150}{n^2 - n}$.

b. Déterminer la composition de l'urne pour que le jeu soit équitable. Conclure.

3. a. Étudier les variations de la fonction f définie sur $[\ 5\ ;+\infty\ [$ par $f(x) = 10\ \dfrac{x-5}{x^2 - x}$.

b. En déduire la ou les valeur(s) de n pour laquelle le joueur a le plus de chances de réaliser A. Préciser la probabilité correspondante.

1.5.4 Le problème du Chevalier de Méré

En 1654 un homme de lettres qui se faisait appeler le Chevalier de Méré posa deux problèmes à Blaise Pascal, philosophe et mathématicien. Le premier problème était le suivant :

> « Qu'est-ce qui est le plus probable : obtenir au moins un six en quatre lancers d'un dé ou obtenir au moins un double-six en lançant 24 fois deux dés ? »

Méré complète alors sa question en demandant combien de lancers faut-il faire au minimum pour obtenir un double-six avec une probabilité supérieure à 1/2.

Ce premier problème est assz facile et vous pouvez le résoudre sans aide…

Le deuxième problème était plus ambigu : deux joueurs A et B lancent une pièce plusieurs fois après avoir misé à parts égales une somme S ; pour chaque Face obtenu A reçoit 1 point et pour chaque Pile B reçoit un point. Le premier arrivé à 5 points emporte la mise. Mais au bout de 7 coups, alors que A a 4 points et B en a 3, le jeu est arrêté : comment partager la mise S de la façon la plus équitable ?

En réalisant une simulation déterminer les probabilités de chacun de gagner ; conclure en donnant la part de chacun.

En fait le problème avait soulevé une discussion entre Pascal et l'autre très grand mathématicien de l'époque, Pierre de Fermat : ce dernier suggère alors divers prolongements à la question de Méré.

1. Il manque 2 points à A et 4 points à B pour gagner ; définir le partage le plus équitable.

2. Trois joueurs jouent à un jeu similaire avec 1 chance sur 3 de marquer un point à chaque lancer ; il manque 1 point à A, 2 points à B et 3 points à C ; le jeu est interrompu, quel est le partage le plus équitable ?

3. Le problème plus général met aux prises deux joueurs ayant les probabilités p et q de marquer un point lors d'un lancer ; ils jouent n fois, A a a points, B a b points ; quelles sont les probabilités respectives de gagner et la répartition des enjeux la plus juste ?

1.5.5 Smoking ? No Smoking ?

EPF 2009

Un fumeur souhaite réduire sa consommation de tabac. Suite à de premières observations, on constate que :

* s'il reste un jour sans fumer, il a 40 % de chances de fumer le lendemain ;
* s'il cède et fume un jour, il a 20 % de chances de fumer le lendemain.

On désigne par p_n la probabilité qu'il fume le n-ième jour.

1. En utilisant un arbre, Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.

2. Pour tout entier n, on pose $q_n = p_n - \dfrac{1}{3}$. Quelle est la nature de la suite (q_n) ?

3. Déterminer la limite de p_n. Que peut-on en conclure ?

1.5.6 Loi géométrique

Partie A

Trois personnes a, b et c jettent une pièce de monnaie dans l'ordre a, b, c, a, b, c,… Le vainqueur est le premier à tirer PILE. Calculer les chances de victoire de chacune des trois personnes.

Partie B

On dispose d'une roulette à deux numéros, 0 et 1 ; la probabilité sur un lancer de tirer 1 est p, celle de tirer 0 est $q=1-p$.

On lance la roulette **jusqu'à ce qu'on obtienne un 1** ; on appelle X la variable aléatoire égale au nombre de fois nécessaire à ce résultat.

1. On prend $p=q=\frac{1}{2}$.

a. Déterminer les probabilités des événements suivants : $X=1$, $X=2$, $X\leq 3$, $X\leq N$, N entier ; $X>N$.

b. On décide de s'arrêter au bout de N lancers, qu'on ait obtenu 1 ou pas.

Déterminer en fonction de N l'espérance mathématique $\mathbb{E}_N(X)$ de X ; que devient $\mathbb{E}_N(X)$ lorsque N devient grand ?

2. Reprendre les questions précédentes avec p et q « quelconques ».

3. Écrire un algorithme permettant de simuler la situation précédente.

Partie C

On joue à un jeu où à chaque partie on a la probabilité p de gagner, $q=1-p$ de perdre. À chaque partie on mise une somme S : si on perd on perd sa mise, le « gain » est S ; si on gagne on multiplie sa mise par k et le « gain » est $(k-1)S$ (par exemple si k=3 on gagnera 3S S=2S).

On mise S € à la première partie : si on gagne on s'arrête de jouer ; si on perd on rejoue en misant kS €. Tant qu'on n'a pas gagné on rejoue en multipliant la mise par k.

1. Montrer que le gain est toujours S quelque soit le moment où on gagne.

2. Montrer qu'il arrive toujours un moment N (la première fois où l'on gagne) où la probabillité de gagner est supérieure à 0,999.

3. Déterminer N ainsi que la dernière mise dans les cas suivants :

a. S=1, k=2, $p=q=\frac{1}{2}$; b. S=1, k=5, $p=\frac{1}{5}$; c. S=1, k=20, $p=\frac{1}{20}$.

3. Conclure.

1.6 QCM et Vrai-Faux

Pour tous les Vrai-Faux cocher sur la grille votre réponse.

1.6.1 Un max de questions (fondamentales bien sûr)

1. A et B sont deux évènements indépendants tels que p(A) = 0,2 et p(B) = 0,3 alors $p(\text{A}\cup\text{B})=$

a. 0,06	b. 0,44	c. 0,5	d. 0,56

2. A et B sont deux évènements ; alors $p(\text{A}\cap\overline{\text{B}})=$

a. $p(\text{A})-p(\text{A}\cap\text{B})$	b. $p(\text{B})-p(\text{A}\cap\text{B})$	c. $p(\overline{\text{B}})-p(\text{A}\cap\text{B})$	d. $p(\text{A})-p(\text{A}\cap\overline{\text{B}})$

3. On désigne par A et B deux évènements indépendants d'un univers muni d'une loi de probabilité p.

On sait que $p(\text{A}\cup\text{B})=\frac{4}{5}$ et $p(\overline{\text{A}})=\frac{3}{5}$. La probabilité de l'évènement B est égale à :

a. $\frac{2}{5}$	b. $\frac{2}{3}$	c. $\frac{3}{5}$	d. $\frac{1}{2}$

4. Une urne contient 5 boules noires et 3 boules blanches.

On tire successivement et sans remises 2 boules de l'urne.

La probabilité de l'événement : « la 2ième boule tirée est noire sachant que la première l'est aussi » est égale à

a. $\frac{5}{4}$	b. $\frac{25}{64}$	c. $\frac{5}{14}$	d. $\frac{4}{7}$

5. Lors d'une course de chevaux comportant 20 partants, la probabilité de gagner le tiercé (choix de 3 parmi 20) dans le désordre est combien de fois supérieure à la probabilité de gagner le tiercé dans l'ordre ?

a. 10 fois	b. 6 fois	c. 5 fois	d. 3 fois

6. Dans un tiroir il y a 3 paires de chaussettes de couleurs différentes ; on tire au hasard 2 chaussettes.
La probabilité qu'elles appartiennent à la même paire est égale à ….

a. $\frac{1}{3}$	b. $\frac{1}{5}$	c. $\frac{1}{6}$	d. $\frac{1}{2}$

7. Une seule de ces 4 affirmations est fausse laquelle ¿

a. c. Dans un jeu de 32 cartes, la probabilité d'obtenir 5 cartes qui se suivent dans une main de 5 cartes est d'environ 1/20.	b. Si on jouait toutes les combinaisons du loto (choix de 6 numéros parmi 49 numéros), il faudrait plus de 100 millions de tickets.	c. Dans un jeu de 32 cartes, la probabilité d'obtenir les 4 as dans une main de 5 cartes est inférieure à un dix millième.	d. Que l'on joue au loto ou pas, la probabilité de gagner le gros lot est identique au 10 millionième près.

8. On considère l'épreuve qui consiste à lancer un dé non truqué.
On gagne 20 € si on obtient le 6, on perd 4 € sinon. L'espérance de gain pour ce jeu est ….

a. Impossible à déterminer	b. Négative	c. Positive	d. Nulle

9. On choisit au hasard une boule d'une urne contenant 3 boules rouges numérotées 1, 2 et 3, deux boules vertes numérotées 1 et 2 et une boule bleue numérotée 1. On considère les évènements suivants :
R : «La boule tirée est rouge » ; A : « la boule tirée est numérotée 1 » ; B : « la boule tirée est numérotée 2 ».
Laquelle de ces 4 affirmations est vraie ¿

a. $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=p(\mathrm{A})\times p(\mathrm{B})$	b. $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=p(\mathrm{A})+p(\mathrm{B})$	c. $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=p(R)$	d. $p(\mathrm{R}\cap\mathrm{B})=\frac{1}{6}$

10. Dans une classe, les garçons représentent le quart de l'effectif.
Une fille sur trois a eu son permis de conduire du premier coup, alors que seulement un garçon sur dix l'a eu du premier coup. On interroge un élève (garçon ou fille) au hasard. La probabilité qu'il ait eu son permis du premier coup est égale à

a. 0,043	b. 0,275	c. 0,217	d. 0,033

11. Dans la classe de la question 10, on interroge un élève au hasard parmi ceux ayant eu leur permis du premier coup. La probabilité que cet élève soit un garçon est égale à :

a. 0,100	b. 0,091	c. 0,111	d. 0,25

12. Un tireur sur cible s'entraîne sur une cible circulaire comportant trois zones délimitées par des cercles concentriques, de rayons respectifs 10, 20 et 30 centimètres.
On admet que la probabilité d'atteindre une zone est proportionnelle à l'aire de cette zone et que le tireur atteint toujours la cible. La probabilité d'atteindre la zone la plus éloignée du centre est égale à :

a. $\frac{5}{9}$	b. $\frac{9}{14}$	c. $\frac{4}{7}$	d. $\frac{1}{3}$

1.6.2 QCM Variables aléatoires (Concours Avenir 2010)

On tire 2 lettres successivement et avec remise d'un sac contenant les lettres M, A, T et H et on considère X la variable aléatoire associée au nombre de voyelles tirées.

Par ailleurs Y est une variable aléatoire indépendante de X prenant pour valeurs -2, 1 et 3 avec des probabilités proportionnelles aux carrés de leurs valeurs.

1. $P(X = 0) =$

A. $\frac{7}{16}$	B. $\frac{8}{16}$	C. $\frac{9}{16}$	D. $\frac{10}{16}$

2. $P(Y = 3) =$

A. $\frac{1}{14}$	B. $\frac{4}{14}$	C. $\frac{9}{14}$	D. $\frac{15}{14}$

3. $\mathbb{E}(X) =$

A. 0	B. 0,5	C. 1	D. 1,5

4. $P(X = Y) =$

A. $\frac{3}{112}$	B. $\frac{25}{56}$	C. $\frac{1}{112}$	D. aucune des 3 réponses précédentes

1.6.3 ECE 2008, exercice 5

Une urne contient sept boules rouges et trois boules blanches. Une épreuve consiste à tirer de manière indépendante, successivement quatre boules avec remise dans l'urne après chaque tirage. On considère la variable aléatoire X qui associe à toute épreuve le nombre de boules rouges tirées.

a. Il y a 10^4 épreuves possibles.	Vrai	Faux
b. L'ensembles des valeurs prises par X est $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.	Vrai	Faux
c. $p(X=1)=4\left(\frac{3}{10}\right)^3\frac{7}{10}$	Vrai	Faux
d. $p(X<4)=\frac{10^4-7^4}{10^4}$.	Vrai	Faux

1.6.4 ECE 2008, exercice 12

Dans une population adulte d'une ville, il y a 55 % d'inactifs ; 80 % des actifs sortent le dimanche et 20 % le samedi ; 90 % des inactifs sortent le samedi et 20 % le dimanche.

a. 47 % des adultes de cette ville sortent le dimanche.	Vrai	Faux
b. 48,5 % des adultes de cette ville sortent le samedi.	Vrai	Faux

Un habitant est choisi au hasard. On constate qu'il sort le samedi.

c. La probabilité pour qu'il soit inactif est d'environ 0,85.	Vrai	Faux
d. La probabilité pour qu'il soit actif est d'environ 0,80.	Vrai	Faux

1.6.5 ECE 2008, exercice 14

On admet que, dans une famille, pour toute naissance d'un enfant, la probabilité d'avoir un garçon est la même que celle d'avoir une fille et que, lors de deux naissances séparées, les sexes des enfants sont indépendants. Pour une famille de deux enfants :

1. La probabilité pour que les enfants soient deux garçons est $\frac{1}{2}$.	Vrai	Faux
2. La probabilité pour qu'il y ait au moins une fille est $\frac{3}{4}$.	Vrai	Faux
3. La probabilité pour que les enfants soient de même sexe est $\frac{1}{2}$.	Vrai	Faux
4. La probabilité pour que les enfants soient de sexes différents est $\frac{1}{2}$.	Vrai	Faux

1.6.6 ECE 2008, exercice 15

Soit X la variable aléatoire réelle dont la loi est donnée par le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4

$p(X=k)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

a. $p(1<X\leq 4)=\frac{11}{16}$.	Vrai	Faux
b. $p((-2<X\leq 2)\cup(X>3))=1$.	Vrai	Faux
c. $p(X\leq 4)=\frac{15}{16}$.	Vrai	Faux
d. $\mathbb{E}(X)=2$.	Vrai	Faux

1.6.7 ECE 2007, exercice 9

Une porte est munie d'un clavier portant les touches 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C. La porte ne s'ouvre que lorsqu'on frappe dans l'ordre 4 chiffres et 2 lettres qui forment un code. Un signal se déclenche lorsqu'aucun des 4 chiffres tapés ne fait partie du code.

Une personne ignorant le code mais sachant que celui-ci comporte 4 chiffres suivis de 2 lettres tente d'ouvrir la porte.

a. Le nombre de codes possibles est $9^4 3^2$.	Vrai	Faux
b. Le nombre de codes possibles ne contenant que des chiffres impairs est $5^4 3^2$.	Vrai	Faux
c. La probabilité pour que la personne déclenche l'alarme au premier essai est de $\frac{11}{9^4 3^2}$.	Vrai	Faux
d. Cette personne effectue 4 essais successifs et indépendants les uns des autres, la probabilité pour qu'elle déclenche l'alarme au cours du quatrième essai est de $\left(1-\frac{11}{9^4 3^2}\right)^3 \frac{11}{9^4 3^2}$.	Vrai	Faux

1.6.8 ECE 2006, exercice 15

Une urne contient cinq boules blanches, deux boules noires et trois boules rouges. On extrait simultanément deux boules de l'urne (on suppose les tirages équiprobables). On considère le jeu suivant :

* le tirage d'une boule noire rapporte 7 points ;
* le tirage d'une boule rouge rapporte 2 points ;
* le tirage d'une boule blanche enlève 2 points.

On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout tirage de deux boules, associe le nombre de points marqués.

a. 45 tirages de deux de ces boules sont possibles.	Vrai	Faux
b. L'ensemble des valeurs prises par X est : $\{-4 ; 0 ; 4 ; 5 ; 9 ; 14\}$.	Vrai	Faux
c. $p(X=14)=\frac{2}{45}$.	Vrai	Faux
d. $p(X=0)=\frac{1}{3}$.	Vrai	Faux

1.6.9 EFREI 2010, Exercice 15

Huit judokas dont deux Français participent à un tournoi international. Un podium est constitué d'un premier, un second et un troisième.

a. Le nombre de podiums possibles est 512.	Vrai	Faux
b. Le nombre de podiums possibles avec deux judokas français est 6.	Vrai	Faux
c. Le nombre de podiums possibles sans judoka français est 120.	Vrai	Faux

1.6.10 ESIEE 2009, exercice 15

Un service de recrutement reçoit 15 dossiers dont 6 comportent un avis favorable et les 9 autres un avis défavorable. Les 15 dossiers sont classés au hasard. La probabilité de l'événement :

a. Le premier dossier est favorable et le second défavorable est $\frac{9}{35}$.	Vrai	Faux
b. Les deux premiers dossiers sont favorables est $\frac{1}{7}$.	Vrai	Faux
c. Les deux premiers dossiers sont défavorables est $\frac{6}{7}$.	Vrai	Faux
d. Au moins un des deux premiers dossiers est défavorable est $\frac{6}{7}$.	Vrai	Faux
e. Dans les 8 premiers dossiers, 3 sont favorables et 5 défavorables est $\frac{56}{143}$.	Vrai	Faux

1.6.11 ESIEE 2009, Exercice 16

On lance deux dés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Pour chaque dé, les probabilités d'obtenir une des six faces sont égales. On note S la somme des points des faces supérieures.

Si $2 \le S \le 3$ on gagne 20 points, si $3 < S \le 5$ on gagne 10 points, si $5 < S < 10$ on gagne 5 points et si $10 \le S \le 12$ on gagne 1 point. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de points par lancer.

a. $p(X=20)=p(X=1)$.	Vrai	Faux
b. $p(X=5)=\frac{5}{9}$.	Vrai	Faux
c. $p(X\le 5)=\frac{13}{18}$.	Vrai	Faux
d. $p(X\ge 10)=\frac{5}{18}$.	Vrai	Faux
e. L'espérance de X est $\frac{64}{9}$.	Vrai	Faux

1.6.12 ESIEE 2005, Exercice 19

On dispose d'un clavier ayant 8 touches. 3 lettres : I, J, K et 5 chiffres : 1, 2, 3, 4 et 5. Un code est composé d'une lettre suivie de 3 chiffres (les chiffres ne sont pas nécessairement distincts).

Remarque : K233 et K323 sont deux codes distincts.

Alors avec ce clavier on peut créer exactement :

a. 53 codes commençant par K.	Vrai	Faux
b. 10 codes commençant par K et dont les chiffres sont tous distincts.	Vrai	Faux
c. 12 codes commençant par 12.	Vrai	Faux
d. 15 codes se terminant par 12.	Vrai	Faux
e. 72 codes contenant les chiffres 1 et 2.	Vrai	Faux

1.6.13 ESIEE 2005, Exercice 20

Une enquête auprès d'étudiants sur les trois langues, anglais, espagnol et russe donne les résultats suivants :

300 étudiants parlent au moins l'anglais,

250 étudiants parlent au moins l'espagnol,

150 étudiants parlent au moins le russe,

100 étudiants parlent au moins l'anglais et l'espagnol,

75 étudiants parlent au moins l'anglais et le russe,

50 étudiants parlent au moins l'espagnol et le russe.

On interroge un de ces étudiants au hasard, alors :

1. La probabilité qu'il parle espagnol sachant qu'il parle anglais est $\frac{1}{3}$.	Vrai	Faux
2. La probabilité qu'il parle espagnol sachant qu'il parle russe est $\frac{1}{8}$.	Vrai	Faux
3. La probabilité qu'il parle russe sachant qu'il parle anglais est $\frac{1}{3}$.	Vrai	Faux
4. Les données sont insuffisantes pour connaître le nombre d'étudiants parlant au moins une des trois langues.	Vrai	Faux
5. Les données sont insuffisantes pour calculer la probabilité qu'il parle anglais.	Vrai	Faux

1.6.14 ESIEE 2004, Exercice 8

Dans un sondage auprès de 100 étudiants, on obtient les résultats suivants :

60 aiment le café, 50 aiment les jus de fruits, 40 aiment le thé ;

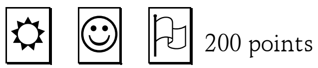
40 aiment les jus de fruits etle café, 10 aiment les trois boissons.

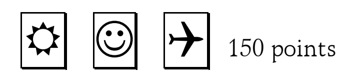
On interroge un de ces étudiants au hasard.

a. La probabilité qu'il aime les jus de fruits sachant qu'il aime le café est $\frac{2}{5}$.	Vrai	Faux
b. La probabilité qu'il aime les trois boissons sachant qu'il aime le thé est $\frac{1}{5}$.	Vrai	Faux
c. La probabilité qu'il aime les jus de fruits et le café sachant qu'il n'aime pas le thé est $\frac{1}{2}$.	Vrai	Faux
d. Les données ne permettent pas de calculer la probabilité qu'il aime les jus de fruits sachant qu'il n'aime pas le café.	Vrai	Faux
e. Les données ne permettent pas de calculer la probabilité qu'il aime le thé sachant qu'il aime le café.	Vrai	Faux

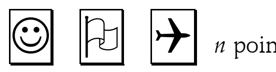
1.6.15 ESIEE 2004, Exercice 10

On dispose de 4 cartes : ☼ ☺ ⚐ ✈. Chaque carte vaut un nombre entier strictement positif de points. On donne la somme des points de 3 cartes.









Alors :

a. Il est impossible que $n = 50$.	Vrai	Faux
b. n est nécessairement supérieur à 150.	Vrai	Faux
c. n est nécessairement un multiple de 3.	Vrai	Faux
d. Si $n = 210$ alors une des cartes vaut 10 points.	Vrai	Faux
e. Si $n = 210$ alors une des cartes vaut 30 points.	Vrai	Faux

1.6.16 ESIEE 2002, Exercice 6

On considère un tableau de 16 cases avec des pions qui sont blancs ou noirs. Sachant que si un pion blanc est sur une case, aucun pion noir ne peut être sur une case adjacente (horizontalement, verticalement ou en diagonale), alors :

a. S'il y a un 5 pions blancs, il peut y avoir 6 pions noirs.	Vrai	Faux
b. S'il y a un unique pion blanc par ligne et par colonne, il peut y avoir 2 pions noirs.	Vrai	Faux
c. S'il y a au plus 12 pions blancs, il peut y avoir un pion noir.	Vrai	Faux
d. S'il y a 9 pions noirs, il ne peut y avoir 2 pions blancs.	Vrai	Faux
e. S'il y a au moins 13 pions noirs, il ne peut pas y avoir de pion blanc.	Vrai	Faux

Ci dessus un exemple : les pions noirs ne peuvent être sur les cases grisées.

1.6.17 ESIEE 2002, Exercice 18

On considère 4 cases alignées numérotées de 1 à 4 et 4 boules, une rouge (R), une bleue (B), une verte (V) et une noire (N).

1	2	3	4

On range une boule par case de façon à ce que les trois conditions suivantes soient vérifiées :

1) Si la case 1 contient la boule verte alors la case 4 contient la boule bleue.
2) La case 2 contient la boule rouge ou la boulme noire.
3) Si la case 3 contient la boule rouge alors la case 1 contient la boule verte et la case 4 la boule bleue.

a. On peut avoir	V	R	N	B		Vrai	Faux
b. On peut avoir	B	N	R	V		Vrai	Faux
c. Il y a exactement 2 rangements possibles avec la boule verte dans la case 1.						Vrai	Faux
d. Il y a exactement 4 rangements possibles avec la boule bleue dans la case 1.						Vrai	Faux
e. Il y a exactement 9 rangements possibles.						Vrai	Faux

1.6.18 ESIEE 2002, Exercice 20

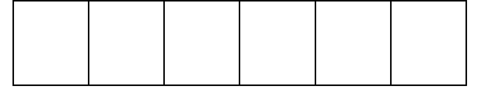
On dispose de deux jeux de cartes, l'un rouge et l'autre bleu. Le jeu rouge est constitué de 6 cartes numérotées de 1 à 6 et indiscernables au toucher. Le jeu bleu est constitué de 6 cartes indiscernables au toucher : deux cartes portent le numéro 2, deux cartes portent le numéro 4 et deux cartes portent le numéro 6.

On tire une carte du jeu rouge et une carte du jeu bleu, on note X le numéro de la carte rouge et Y celui de la carte bleue.

a. $p(X=4, Y=2)=\frac{1}{18}$.	Vrai	Faux
b. $p(X=4, Y=4)=\frac{1}{36}$.	Vrai	Faux
c. $p(X+Y=3)=p(X+Y=4)$.	Vrai	Faux
d. $p(X+Y=6)=p(X+Y=8)$.	Vrai	Faux
e. $p(X+Y=7)=\frac{1}{6}$.	Vrai	Faux

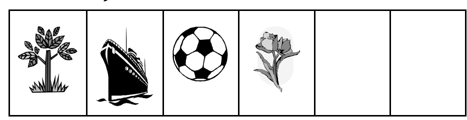
1.6.19 ESIEE 2000, Exercice 14

On dispose des quatre motifs : un arbre, un ballon, une rose et un bateau pour dessiner un drapeau composé de six cases.

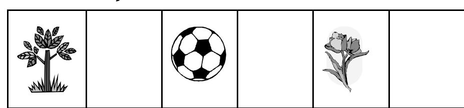


Dans un drapeau deux cases voisines ne peuvent avoir le même motif. Alors :

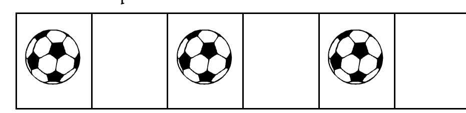
a. Il y a exactement 9 façons de finir ce drapeau :



b. Il y a exactement 27 façons de finir ce drapeau :



c. Il y a exactement 27 façons de finir ce drapeau :



d. Il y a exactement 6 façons de dessiner un drapeau avec uniquement 2 motifs.

e. Il y a exactement 4×3^5 façons de dessiner un drapeau.

1.6.20 ESIEE 2000, Exercice 15

Sept chevaux pénètrent au hasard et successivement sur la piste d'un cirque, trois chevaux sont blancs et les quatre autres sont noirs. On note X la variable aléatoire égale au rang d'entrée du premier cheval noir. Alors :

a. La probabilité que le premier cheval apparu soit blanc est $\frac{1}{3}$.	Vrai	Faux
b. La probabilité que les deux premiers chevaux apparus soient blancs est $\frac{1}{7}$.	Vrai	Faux
c. $P(X=2)=\frac{2}{7}$.	Vrai	Faux
d. $P(X=4)=\frac{1}{6}$.	Vrai	Faux
e. L'espérance mathématique de X est $\mathrm{E}(X) = \frac{8}{5}$.	Vrai	Faux

1.6.21 ESIEE 2000, Exercice 16

Dans une mare, vivent des grenouilles vertes et des rainettes. 30 % des grenouilles sont des rainettes et donc 70 % des grenouilles sont des grenouilles vertes. Un héron mange 10 % des rainettes et 20 % des grenouilles vertes de cette mare. Alors, dans cette mare, la probabilité :

a. Qu'une rainette soit mangée par le héron est $\frac{1}{10}$.	Vrai	Faux
b. Qu'une grenouille verte soit mangée par le héron est $\frac{1}{5}$.	Vrai	Faux
c. Qu'une grenouille soit mangée par le héron est $\frac{3}{10}$.	Vrai	Faux
d. Qu'une grenouille soit une rainette et mangée par le héron est $\frac{3}{100}$.	Vrai	Faux
e. Qu'une grenouille mangée par le héron soit une rainette est $\frac{1}{3}$.	Vrai	Faux

1.6.22 Fesic 2008, Exercice 13

Soient b et n deux entiers naturels tels que $b>2$ et $n\geq 2$.

Une urne contient 2 boules blanches et $(b-2)$ boules noires, indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule de l'urne, on repère sa couleur et on la remet dans l'urne. On répète ainsi n fois cette expérience.

On désigne par p_n la probabilité de tirer une boule blanche et une seule lors des $(n-1)$ premiers tirages et une boule noire au n-ième tirage.

a. $p_2 = 1 - \frac{2}{b^2}$.	Vrai	Faux
b. $p_n = \frac{2(n-1)}{b}\left(1 - \frac{2}{b}\right)^{n-1}$.	Vrai	Faux
c. $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(p_n) = +\infty$.	Vrai	Faux
d. $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{p_n}{n-1} = 1$.	Vrai	Faux

1.6.23 Fesic 2008, Exercice 14

Un jeu consiste à lancer trois fois de suite et de façon indépendante un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On obtient ainsi une partie complète en trois manches, chaque lancer constituant une manche.

Le joueur gagne la partie s'il obtient « 1 » ou « 2 » à chaque lancer. Il perd dans les autres cas.

La partie coûte 1 euro ; le joueur reçoit 27 euros s'il gagne la partie.

a. La probabilité de gagner une partie est $\frac{1}{27}$.	Vrai	Faux
b. Ce jeu est équitable.	Vrai	Faux
c. La probabilité pour un joueur de gagner au moins une fois en trois parties est $\frac{1}{9}$.	Vrai	Faux
d. La probabilité qu'un joueur gagne une partie sachant qu'il a gagné la 1ère manche est la même que la probabilité qu'il gagne la 1ère manche sachant qu'il a gagné la partie.	Vrai	Faux

1.6.24 Fesic 2005, Exercice 16

Un sondage fait état de l'intérêt d'un certain nombre de personnes sur la lecture de trois revues, appelées A, B et C. Tous les chiffres cités ci-dessous font référence à ces personnes sondées.

Parmi les personnes interrogées, 75 lisent A, 58 lisent B et 60 lisent C. On sait de plus que 18 lisent A et B, 18 lisent B et C et 15 lisent A et C. Enfin 3 personnes lisent les trois revues et 5 personnes ne lisent aucune de ces revues.

Par ailleurs, et parmi les personnes qui ne lisent que la revue A, 20 sont des femmes ; parmi les personnes qui ne lisent que la revue B, les deux-cinquièmes sont des femmes ; parmi les personnes qui ne lisent que la revue C, il ya moitié-moitié d'hommes et de femmes.

a. 150 personnes ont été sondées.	Vrai	Faux
b. 100 personnes lisent une et une seulement de ces trois revues.	Vrai	Faux
c. On interroge au hasard une personne du sexe masculin qui ne lit que l'une des trois revues. Il y a 25 % de chances qu'il s'agisse d'un homme qui ne lise que la revue A.	Vrai	Faux
d. On interroge au hasard une personne qui ne lit que l'une des trois revues. Il y a 25 % de chances qu'il s'agisse d'un homme qui ne lise que la revue A.	Vrai	Faux

1.6.25 Fesic 2004, Exercice 13

Une urne contient 3 boules : une bleue, une verte et une rouge. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise intermédiaire.

On suppose les tirages équiprobables et indépendants et on appelle p la probabilité associée à cette expérience. On définit de plus les événements suivants :

* On appelle A_n l'événement : « Les $n-1$ tirages ont donné la même boule et la $n^{\text{ième}}$ boule tirée est différente des précédentes » ;

* Lorsque k est un entier compris entre 1 et n, on appelle B_k, V_k et R_k les événements respectivement associés au tirage d'une boule bleue, verte ou rouge lors du $k^{\text{ième}}$ tirage.

a. $p(B_1 \cap \overline{B}_2) = 1 - p(V_1 \cap \overline{V}_2) - p(R_1 \cap \overline{R}_2)$.	Vrai	Faux
b. $p(A_2) = \frac{2}{3}$.	Vrai	Faux
c. Pour tout entier $n \geq 2$, on a : $p(A_n) = \frac{2}{3^{n-1}}$.	Vrai	Faux
d. $\lim_{n \to \infty} [p(A_2) + p(A_3) + ... + p(A_n)] = \frac{1}{3}$.	Vrai	Faux

1.6.26 Fesic 2003, Exercice 14

60 % des candidats au concours de la FESIC sont des filles. Parmi elles, 30 % ont suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques en terminale.

Par ailleurs, 20% des candidats sont des garçons qui ont suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques en terminale.

a. On interroge un candidat au hasard. La probabilité que ce soit une fille qui ait suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques en terminale est de 30 %.	Vrai	Faux
b. On interroge un garçon qui est candidat. La probabilité qu'il ait suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques en terminale est de 20 %.	Vrai	Faux
c. 38 % des candidats ont suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques en terminale.	Vrai	Faux
d. On interroge un candidat qui a suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques en terminale. La probabilité qu'il s'agisse d'une fille est $\frac{9}{19}$.	Vrai	Faux

1.6.27 Fesic 2002, Exercice 15

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une urne contient :

- une boule numérotée 0,
- une boule numérotée 1,
- 2^1 boules numérotées 2,
- 2^2 boules numérotées 3,

……………………………….

- 2^{k-1} boules numérotées k (k entier compris entre 1 et n),

……………………………….

- 2^{n-1} boules numérotées n.

Les boules sont indiscernables au toucher. On extrait au hasard une boule de l'urne et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

a. L'urne contient $2^n - 1$ boules.	Vrai	Faux
b. Pour tout entier naturel k tel que $1 \leq k \leq n$, on a : $P(X = k) = 2^{n-k+1}$.	Vrai	Faux
c. On a pour $n \geq 2$: $\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$.	Vrai	Faux
d. On a : $\mathbb{E}(X) = (n-1)2^n + 1$.	Vrai	Faux

1.6.28 Fesic 2000, Exercice 19

Un autoradio est muni d'un code de sécurité constitué de 4 chiffres : chacun de ces chiffres est compris entre 0 et 9 ; seul le premier ne peut pas être nul.

Lorsque le poste est enlevé de son emplacement dans l'automobile, il faut, pour le réinstaller, composer le code de sécurité. Lorsque le premier code composé est inexact, il faut attendre deux minutes pour pouvoir composer un nouveau code. Si celui-ci est inexact, il faut à nouveau attendre 4 minutes pour composer le code suivant et ainsi de suite, le temps d'attente étant multiplié par deux à chaque fois.

On admet que l'on peut renouveler l'opération autant de fois que l'on veut et on néglige à chaque fois le temps mis pour composer le code.

a. En 24 heures, on a le temps de faire au maximum 10 essais.	Vrai	Faux

On suppose que l'on compose les codes au hasard, sans répétition, jusqu'à obtention du code correct.

b. La probabilité pour que le code ne soit exact qu'au quatrième essai est $\frac{1}{8997}$.	Vrai	Faux
c. La probabilité pour que le code correct soit trouvé en moins de 24 heures est $\frac{1}{900}$.	Vrai	Faux
d. La probabilité pour que le code correct soit trouvé au cours du deuxième jour est $\frac{1}{8990}$.	Vrai	Faux

1.7 Informatique

1.7.1 Un algorithme indispensable

Écrire un algorithme disant si tous les éléments d'une liste de nombres sont distincts.

1.7.2 Ⓜ Bilan Carbone

Vous disposez d'un fichier Geogebra avec les quantités de CO_2 relevées à l'observatoire de Mauna Loa à Hawaii depuis janvier 2005 ; les données proviennent du site http://esrl.noaa.gov/gmd/ccgg/trends/. Vous avez également un fichier Excel avec les températures de la Terre depuis 1900 (site).

Votre mission (si vous l'acceptez…) consiste à préparer un graphique avec les dates en abscisse, les quantités de CO_2 en ordonnées sur la période en question ainsi que la température Terrestre.

1. a. Améliorer la présentation actuelle en mettant en abscisse les dates.

b. Mettre les dates tous les trois mois pour une meilleure lisibilité.

c. Compléter le graphique en lissant les variations saisonnières au moyen de la « **moyenne mobile** ».

2. Augmenter la durée de représentation année par année depuis 1959 grâce aux données présentes sur le site.

3. Utiliser les données de température moyenne du globe et les mettre en regard.

4. Faites une présentation élaborée de vos calculs.

(*raw data* sur www.woodfortrees.org ; voir sur http://www.manicore.com/index.html ainsi que sur http://www.pensee-unique.fr/indicateurs.html de nombreux liens, illustrations et questionnements…)

Cet enregistrement s'autodétruira dans les 5 secondes…

1.7.3 Les chasseurs

Engel p 137

Dix chasseurs, tous tireurs d'élite, sont à l'affût aux canards devant un lac. Dix canards se posent sur le lac juste devant eux. Les chasseurs ne peuvent tirer qu'une seule fois et ne peuvent repérer qui tire sur tel ou tel canard. Ils tirent tous en même temps, chacun choisissant sa victime au hasard.

Combien de canards survivront en moyenne si on répète plusieurs fois cette expérience (douloureuse).

1. Réaliser une simulation en tirant dix chiffres au hasard et en comptant le nombre de chiffres qui ne sont pas tirés ; ces chiffres non tirés représentent les canards survivants : par exemple le tirage donne 1, 2, 0, 5, 6, 2, 3, 9, 1, 3 ; les chiffres 4, 7 et 8 ne sont pas tirés, on a donc 3 canards survivants.

En recommençant de nombreuses fois on obtient une moyenne suffisamment fiable.

2. Quelle est la probabilité qu'un canard ne soit pas choisi par un chasseur ? Par dix chasseurs ? Conclure et comparer au résultat obtenu au 1.

3. Reprendre l'exercice avec un nombre plus élevé de canards.

1.7.4 Les anniversaires

Engel p 139

1. Dans une salle il y a 23 personnes. Quelle est la probabilité qu'au moins deux personnes aient le même jour anniversaire.

a. On fait des tirages de 23 nombres compris entre 1 et 365 ; on regarde alors si au moins deux de ces nombres sont identiques ; en recommençant de nombreuses fois on obtient une approximation de la probabilité cherchée.

b. Déterminer « à la main » la probabilité qu'aucune des 23 personnes n'aient la même date anniversaire ; en déduir la probabilité cherchée. Comparer avec la simulation.

2. Reprendre le 1 .a. avec un groupe de n personnes de manière à trouver le nombre minimal de personnes nécessaire pour que la probabilité que parmi ces n personnes deux au moins aient la même date anniversaire soit supérieure à 0,9.

Pensez-vous pouvoir effectuer ce calcul « à la main » ?

1.7.5 Nous voulons une fille !

Dans la ville de Maulamaula (imaginaire bien sûr !) il y a 2000 couples qui ont tous au moins un enfant et tous veulent une fille. Cependant ils ne veulent pas plus de quatre enfants.

Ils appliquent donc tous la stratégie suivante : ils feront un autre enfant tant qu'ils n'ont pas une fille ou quatre garçons (à ce moment ils arrêtent les frais).

Nous admettrons que chacun de ces couples peut avoir autant d'enfants qu'il le désire, qu'à chaque naissance, ils ont autant de chance d'avoir un garçon qu'une fille et qu'ils n'ont pas de jumeaux.

1. a. Donner toutes les compositions de familles possibles dans cette ville :

b. Pensez-vous que le nombre de filles dans cette ville sera supérieur, inférieur ou à peu près égal à celui des garçons (expliquez…) ?

Partie informatique

Nous allons simuler ce qui se passe pour 2000 couples et chercher des réponses aux questions suivantes :

* Quelle sera la proportion de garçons et de filles dans cette ville ?

* Quel sera le nombre moyen d'enfants par famille dans cette ville ?

1. *Avec le tableur*

a. Dans la cellule F1, mettre la formule : `=A1`. Dans la cellule G1, mettre la formule : `=SI(F1="G";B1;"")`

Que fait cette formule ?

b. Recopier la formule de G1 en H1 et I1. Qu'a-t-on simulé dans les cellules F1 à I1 ?

c. Recopier la ligne 1 jusqu'à la ligne 2000.

d. Dans les cellules A2002 à A2007 mettre les titres suivants :

Nombre de garçons
Nombre de filles
Total
Proportion Garçons
Proportion Filles
Nombre moyen d'enfants par famille

e. Dans la cellule B2002, mettre la formule : `=NB.SI(F1:I2000;"G")`

Dans la cellule B2003, mettre la formule donnant le nombre total de filles dans les 2000 familles.

Dans la cellule B2004, mettre la formule donnant le nombre total d'enfants

Dans la cellule B2005, mettre la formule donnant la proportion de garçons

Dans la cellule B2006, mettre la formule donnant la proportion de filles dans la ville.

Observer les résultats en faisant plusieurs tests avec la touche « F9 ».

Les proportions de garçons et de filles semblent-elles égales ?

Dans la cellule B2007, mettre la formule donnant le nombre moyen d'enfants par couple.

2. *Algorithmes*

a. Écrire un algorithme simulant la naissance d'un garçon ou d'une fille avec la probabilité 0,5.

On l'appelle NAISSANCE et il renvoie le résultat 0 pour un garçon, 1 pour une fille.

b. Écrire un algorithme simulant les 2000 naissances et renvoyant une liste de 0 et de 1.

c. Améliorer cet algorithme pour qu'il simule la situation décrite au début du problème et donne les résultats demandés au début.

Partie théorique

1. a. 2000 couples ont un premier enfant.

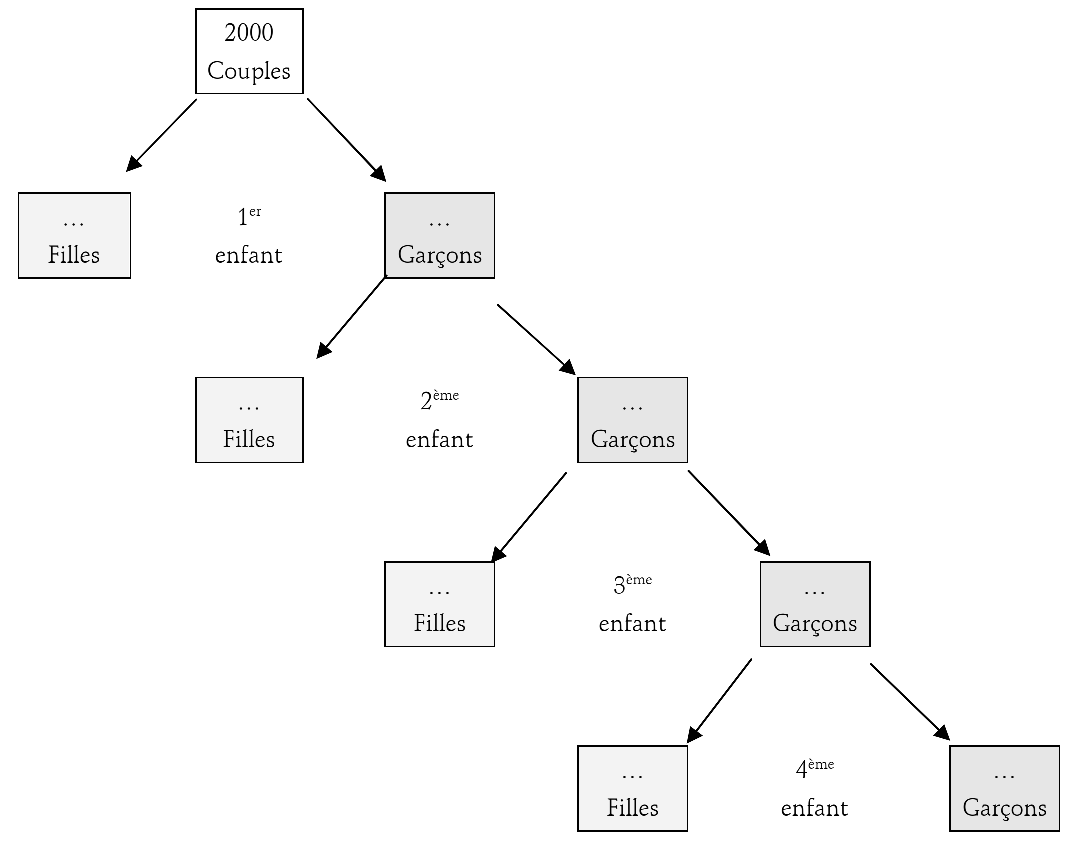
À quel nombre théorique de naissances de filles peut-on s'attendre pour ce premier enfant ?

b. À quel nombre de couples avec un enfant peut-on s'attendre dans Maulamaula ?

c. 1000 couples ayant déjà un garçon ont un deuxième enfant. À quel nombre théorique de naissances de filles peut-on s'attendre pour ce deuxième enfant ?

d. À quel nombre de couples ayant deux enfants peut-on s'attendre dans notre ville ?

2.a. Compléter le schéma suivant, indiquant la répartition théorique des naissances pour les 2000 couples de notre ville.



b. Pour 2000 couples, donner la répartition théorique attendue :

Enfants	F	GF	GGF	GGGF	GGGG
Effectifs					

c. Déterminer :

- le nombre théorique de filles pour les 2000 couples ;
- le nombre théorique de garçons pour les 2000 couples ;
- le nombre théorique moyen d'enfants pour les 2000 couples.

Comparer les simulations faites au 2. et au 3. à ces résultats théoriques.

4. Refaire la simulation et compléter l'étude théorique en supposant maintenant que les couples de la ville ont un autre enfant tant qu'ils n'ont pas une fille ou cinq garçons.